Παραδείγματα (Διανυσματικοί Χώροι - Χώροι Banach)

1) $\mathbb{R}^k$, $k=1,2,\dots$

$\forall p \geq 1$, $\forall x \in \mathbb{R}^k$ ορίζουμε

$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p}$ και $\|x\|_\infty = \max\{|x_i|, i=1,\dots,k\}$

Οι $\|\cdot\|_p$, $1 \leq p < \infty$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμες στον $\mathbb{R}^k$

Απόδ

Για $p=1$ η απόδειξη ότι είναι νόρμα είναι απλή

Για $1<p<\infty$ η απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας $\|x+y\|_p \leq \|x\|_p + \|y\|$ είναι συνέπεια της Minkowski

Για $p=2$ η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Όσο για την νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ είναι:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $1<p<\infty$

$\|x\|_\infty \leq \|x\|_p \leq k^{1/p} \|x\|_\infty$

διότι $\forall j=1,\dots,k$ είναι:

$|x_j| = (|x_j|^p)^{1/p} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} |x_i|^p\right)^{1/p} = \|x\|_p$

Άρα, $\|x\|_\infty = \max\{|x_j| : j=1,2,\dots,k\} \leq \|x\|_p$

Επίσης, $\forall j=1,2,\dots,k$

$|x_j|^p \leq \|x\|_\infty^p \Leftrightarrow \sum_{j=1}^{k} |x_j|^p \leq \sum_{j=1}^{k} \|x\|_\infty^p =$

$= k\|x\|_\infty^p \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\sum_{j=1}^{k} |x_j|^p\right)^{1/p} \leq k^{1/p} \|x\|_\infty \Rightarrow \|x\|_p \leq k^{1/p} \cdot \|x\|_\infty$.

Για τις αντίστοιχες μετρικές $\rho_p = \rho_{\|x\|_p}$ και $\rho_\infty = \rho_{\|\cdot\|_\infty}$, $1 \leq p \leq \infty$ θα ισχύει:

$\rho_\infty(x,y) \leq \rho_p(x,y) \leq k^{1/p} \cdot \rho_\infty(x,y)$

Δηλαδή, οι μετρικές είναι ισοδύναμες και οι αντίστοιχες νόρμες τους είναι ισοδύναμες

Άρα, όποια νόρμα και να επιλέξαμε θα ορίζεται η ίδια τοπολογία

2) Αν $X_1, X_2, \ldots, X_k$ χώροι με νόρμα και αν ορίσουμε $X = \prod_{i=1}^{k} X_i$ είναι δ.χ με πράξεις κατά σημείο, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i$ για $1 \le p < \infty$ έχουμε: $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{k} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$ (στην ειδική περίπτωση $X_i = \mathbb{R}$, $\forall i = 1, 2, \ldots, k$ και αναφερόμαστε στο 1º παράδειγμα) και αν ορίσουμε $\|x\|_\infty =: \max\{|x_i| : i = 1, \ldots, k\}$, τότε για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \prod_{i=1}^{k} X_i$ οι νόρμες $\|\cdot\|_\infty$ και $\|\cdot\|_p$, $1 \le p < \infty$ είναι νόρμες στο X (Απόδ. σαν το παρ. 1º) και επίσης

$\|x\|_\infty \le \|x\|_p \le k^{1/p} \cdot \|x\|_\infty$.

Είναι γνωστό ότι $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_k, \rho_k)$ είναι πλήρεις τότε αν $(X_1, \rho_1), \ldots, (X_k, \rho_k)$ είναι διαχωρίσιμοι τότε και ο X είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα ο $\mathbb{R}^k$ είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach.

3) Έστω Γ τυχόν σύνολο

$$\ell^\infty(\Gamma) =: \{ f \,/\, f : \Gamma \to \mathbb{R} \text{ φραγμένη} \}$$

$\forall f \in \ell^\infty(\Gamma)$ ορίζουμε:

$$\|f\|_\infty = \sup\{ |f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma \}$$

Καταρχάς ο $\ell^\infty(\Gamma)$ (ως προς τη νόρμα $\|\ \|_\infty$) είναι δ.χ με πράξεις κατά σημείο (το άθρ. δύο φραγμ. συναρτ. είναι φραγμ. συναρτ. και το βαθμωτό γινόμενο επίσης φραγμ. συναρτ.) και $\|\cdot\|_\infty$ είναι νόρμα στο $\ell^\infty(\Gamma)$.
αφού

1) $\|f\|_\infty \geq 0$, $\forall f \in \ell^\infty(\Gamma)$ και $\|f\|_\infty = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f(\gamma) = 0 \quad \forall \gamma \in \Gamma \Rightarrow f = 0$

2) $\|\lambda f\|_\infty = \sup\{|(\lambda f)(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} =$
$= |\lambda| \cdot \sup\{|f(\gamma)| : \gamma \in \Gamma\} = |\lambda| \cdot \|f\|_\infty$.

3) Εστω $f, g \in \ell^\infty(\Gamma)$ και
$\forall \gamma \in \Gamma : |(f+g)(\gamma)| = |f(\gamma) + g(\gamma)| \leq$
$\leq |f(\gamma)| + |g(\gamma)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \sup |(f+g)(\gamma)| \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty \Rightarrow$
$\Rightarrow \|f+g\|_\infty \leq \|f\|_\infty + \|g\|_\infty$.

Οδο $\ell^\infty(\Gamma)$ χώρος Banach.

Εστω $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ βασική ακολουθία στον $\ell^\infty(\Gamma)$ ως βασική
Για κάθε $\gamma \in \Gamma$: $|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty \leq \varepsilon$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$
Αρα, η $(f_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ είναι βασική στο $\mathbb{R}$.
Συνεπως, $(f_n(\gamma))_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει σε κάποιο πραγματικο αριθμο.
Ορίζουμε, λοιπον $f : \Gamma \to \mathbb{R}$ με
$f(\gamma) = \lim_n f_n(\gamma)$
Αρκεί νδο $f \in \ell^\infty(\Gamma)$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$
Εστω τυχόν $\varepsilon > 0$
Τοτε υπαρχει $n_0 \in \mathbb{N}$, για καθε $n, m \geq n_0$
$\Rightarrow \|f_n - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2}$.
Δηλαδη,
$|f_n(\gamma) - f_m(\gamma)| < \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n, m \geq n_0$, $\gamma \in \Gamma$
Παίρνοντας, λοιπον το όριο για $m \to \infty$ προκύπτει
$|f_n(\gamma) - f(\gamma)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, $\forall n \geq n_0$, $\forall \gamma \in \Gamma$. (*)
Εντούτοις, $f_{n_0}(\gamma) - f(\gamma)$ είναι φραγμένη
δηλαδή $f_{n_0} - f \in \ell^\infty(\Gamma)$, Ετσι $f = f_{n_0} - (f_{n_0} - f) \in \ell^\infty(\Gamma)$

Από, την (*)

$$\sup\{|f_n(\gamma)-f(\gamma)| : \gamma\in\Gamma\} \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon, \ \forall n\geq n_0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \|f_n-f\|_\infty < \varepsilon, \ \forall n\geq n_0 \rightarrow f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$$

Άρα, πραγματι αυτός ο χώρος είναι χώρος Banach.

Σχολιο

Για $\Gamma=\mathbb{N}$ ο χώρος $\ell^\infty(\mathbb{N})$ συμβολίζεται και με ℓ^∞.

ΘΕΩΡΗΜΑ

Ο $\ell^\infty(\Gamma)$ είναι διαχωρίσιμος αν.ν το σύνολο Γ είναι πεπερασμένο

Αποδ

Εαν Γ πεπερ. με k στοιχεία

τοτε $(\ell^\infty(\Gamma), \|\cdot\|_\infty) = (\mathbb{R}^\Gamma, \|\cdot\|_\infty) = (\mathbb{R}^k, \|\cdot\|_\infty)$

είναι διαχωρίσιμος.

Αν Γ απειροσύνολο

για κάθε $A\subset\Gamma$ ορίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση του A:

$$\chi_A := \begin{cases} 1, & x\in A \\ 0, & x\in\Gamma\setminus A \end{cases}$$

Προφανώς χ_A φραγμένη $\forall A\subset\Gamma$

δηλαδή $\chi_A\in\ell^\infty(\Gamma)$

και για $A,B\subset\Gamma$ με $A\neq B$

$\|\chi_A-\chi_B\|_\infty = 1$

Τότε, $B(\chi_A,\frac{1}{2})\cap B(\chi_B,\frac{1}{2}) = \emptyset$ (*)

Έστω τώρα D τυχόν πυκνό $\subseteq \ell^\infty(\Gamma)$

Τότε $D \cap B(\chi_A, \frac{1}{2}) \neq \emptyset \quad \forall A \subset \Gamma$

Έτσι, ορίζεται συνάρτηση $\varphi : \mathcal{P}(\Gamma) \to D \subseteq \ell^\infty(\Gamma)$ με $\varphi(A) \in D \cap B(\chi_A, \frac{1}{2})$.

Το σύνολο $\mathcal{P}(\Gamma)$ είναι υπεραριθμήσιμο. Λόγω της (*) η φ είναι 1-1 και το $\mathcal{P}(\Gamma)$ υπεραριθμήσιμο τότε και το D θα είναι υπεραριθμήσιμο. Επομένως, ο $\ell^\infty(\Gamma)$ δεν είναι διαχωρίσιμος. Ειδικότερα, ο $\ell^\infty(\mathbb{N})$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και Y γραμμικός υπόχωρος του X ($Y \leq X$). Τότε, ο Y με τον περιορισμό της νόρμας του X στον Y είναι χώρος με νόρμα και λέγεται υπόχωρος του $(X, \|\cdot\|)$

Από τα στοιχεία της τοπολογίας μετρικών χώρων:

i) Αν X χώρος Banach και $Y \leq X$ ο Y είναι χώρος Banach $\Leftrightarrow$ ο Y είναι κλειστός υπόχωρος του X

ii) Αν X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα τότε κάθε υπόχωρος του X είναι διαχωρίσιμος

Παραδείγματα

4) Έστω X τυχαίος μχ και ορίζουμε ως που να ορίζεται η $\|\cdot\|_\infty$ στον F.

$\tilde{C} = \tilde{C}(X) = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R},\ f$ συνεχής & φραγμ.$\}$

και $\|f\|_\infty = \sup\{ |f(x)| : x \in X \}$.

Ο $\tilde{C}(X)$ είναι δ.χ με πράξεις κατά σημείο και μάλιστα $\tilde{C}(X) \leq \ell^\infty(X)$.

και η $\|\cdot\|_\infty$ είναι περιορισμός της νορμας του $\ell^\infty(X)$ στον $\tilde{C}(X)$

Θδο $\tilde{C}(X)$ είναι χωρος Banach.

Εντουτοις, Θδο κλειστος $\subseteq \ell^\infty(X)$

Εστω λοιπόν $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ακολ. στον $\tilde{C}(X)$ και $f \in \ell^\infty(X)$ ωστε $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

Θα δ.ο $f \in \tilde{C}(X) \Leftarrow f$ συνεχής.

Εστω τωρα $x \in X$ και εστω $\varepsilon > 0$

Εφόσον $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} f$

τοτε $\exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \forall\, n \geq n_0 \Rightarrow \|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}$

ειδικοτερα $\|f_{n_0} - f\| < \frac{\varepsilon}{3}$.

Εφόσον δηλ. f_{n_0} συνεχής τοτε

$\exists\, \delta > 0$ ώστε $(\forall\, y \in X)$ $\rho(x,y) < \delta \Rightarrow |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$

$\forall\, y \in X$ $\rho(x,y) < \delta$ εχουμε

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| \leq$$

$$\leq \underbrace{\|f_{n_0} - f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} + \frac{\varepsilon}{3} + \underbrace{\|f_{n_0} - f\|_\infty}_{<\frac{\varepsilon}{3}} < \varepsilon$$

Αρα, f συνεχής στο x

Αφου x τυχόν στο $X \Rightarrow f$ συνεχής

Αρα $f \in \tilde{C}(X)$ (δηλ. ο χωρος $\tilde{C}(X)$ κλειστός)

Σχόλιο

Αν X συμπαγής μ.χ τότε καθε συνεχής $f : X \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, αρα $\tilde{C}(X)$ ταυτίζεται με τον $C(X) = \{ f \mid f : X \to \mathbb{R} \text{ συνεχ} \}$

Αρα, $(\tilde{C}(X), \|\cdot\|_\infty)$ χώρος Banach $\forall$ συμπαγή μ.χ. X. Ειδικότερα για $X = [a,b]$ τοτε $(C([a,b]), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach

Θεώρημα Weierstrass

Αν $f:[\alpha,\beta]\to\mathbb{R}$ συνεχής και $\varepsilon>0$

τότε $\exists P(x)$: πολυώνυμο τ/ω

$|f(x)-P(x)|<\varepsilon, \ \forall x\in[\alpha,\beta]$

Σχόλιο

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$

$P_n(x)=x^n, \ \forall x\in[\alpha,\beta]$

$P_0(x)=1$

το $P=\{P_0,P_1,\dots\}$ είναι αριθμήσιμο

ενώ $span(P)\subseteq$ όλων των πολυωνύμων

Άρα, λόγω του Θεωρήματος Weierstrass

$span(P)$ πυκνό. Άρα, είναι και όλο

Τουτέστιν, $(C[\alpha,\beta], \|\cdot\|_\infty)$ διαχωρίσιμος

Άρα, $(C[\alpha,\beta], \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach και διαχωρίσιμος χώρος.

5) Έστω ο χώρος $c_0=c_0(\mathbb{N})$

όπου $c_0(\mathbb{N})=\{x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=(x(n))_{n\in\mathbb{N}}\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \lim x_n=0\}$

$\|x\|_\infty=\sup\{|x_n| : n\in\mathbb{N}\}$.

Ο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)\subseteq(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$

Πρέπει νδο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ χώρος Banach

Δηλ. α.νδο $(c_0(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty)$ κλειστός $\subseteq$ του $(\ell^\infty(\mathbb{N}), \|\cdot\|_\infty) \Leftrightarrow$ αν $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ακολουθία στοιχείων του $c_0(\mathbb{N})$ και $x\in\ell^\infty(\mathbb{N})$ με $x_i\xrightarrow{\|\cdot\|_\infty}x$ τότε $x\in c_0(\mathbb{N})$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $i_0\in\mathbb{N}$:

$\|x_{i_0}-x\|_\infty<\frac{\varepsilon}{2}, \ \forall i\geq i_0$

Εφόσον $x_{i_0}=(x_{i_0}(n))_{n\in\mathbb{N}}\in c_0(\mathbb{N})$

υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$: $\forall n\geq n_0 \Rightarrow |x_{i_0}(n)|<\frac{\varepsilon}{2}$

Για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε:

$|x(n)| \leq |x(n) - x_{i_0}(n)| + |x_{i_0}(n)| \leq$

$\leq \|x_{i_0} - x\|_\infty + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$

Άρα, $x(n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0 \Rightarrow \lim \overline{x}(n) = 0 \Rightarrow x \in C_0(\mathbb{N})$

Θδο $C_0(\mathbb{N})$ διαχωρίσιμος.

Για κάθε $i = 1, 2, \ldots$

θεωρούμε το $e_i = (0, \ldots, 0, \underset{i\text{-θέση}}{1}, 0, \ldots)$

Το σύνολο $E = \{e_1, e_2, \ldots\}$ αριθμήσιμο

αρκεί λοιπόν τώρα νδο το E ολικό

δηλ. ότι $Span(E)$ πυκνό στο $C_0(\mathbb{N})$

Θεωρούμε ένα $x \in C_0(\mathbb{N})$ και θέτουμε

$y_i = x(1)e_1 + x(2)e_2 + \cdots + x(i)e_i + 0 + \cdots + 0$

όπου $y_i \in Span(E)$.

$\|y_i - x\|_\infty = \sup\{|y_i(n) - x(n)| : n \in \mathbb{N}\} =$

$= \sup\{|y_i(n) - x(n)| \; n > i\} =$

$= \underbrace{\sup\{|x(n)| : n > i\}}_{\to 0} < \varepsilon$ (αφού $\lim x(n) = 0$)

άρα βρήκαμε μια ακολουθία

$y_i \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} x$, άρα $x \in \overline{Span(E)}$

Άρα, ο $C_0(\mathbb{N})$ είναι διαχωρίσιμος

6) Οι χώροι $\ell^p(\mathbb{N})$, με $1 \leq p < \infty$

είναι:

$\ell^p(\mathbb{N}) = \{x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}} = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : \sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p < \infty\}$

και $\|x\|_p = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x(n)|^p\right)^{1/p}$, $\forall x = (x(n))_{n \in \mathbb{N}} \in \ell^p(\mathbb{N})$

ο $\ell^p(\mathbb{N})$ με πράξεις κατά σημείο είναι γραμμικός χώρος και η $\|\cdot\|_p$ νόρμα στο $\ell^p(\mathbb{N}) \subset C_0(\mathbb{N})$

(Χρησιμοποιείται η ανισότητα Minkowski, για να δειχθεί ότι ο $\ell^p(\mathbb{N})$ είναι κλειστός ως προς + και για την τριγωνική ανισότητα της $\|\cdot\|_p$)

$\ell^p(\mathbb{N}) \subset C_0(\mathbb{N}) \subset \ell^\infty(\mathbb{N})$

Ο $\ell^p(\mathbb{N})$ δεν είναι $\leq$ του $c_0(\mathbb{N})$ ή του $\ell^\infty(\mathbb{N})$ διότι έχει άλλη νορμα.

i) Ο $\ell^p(\mathbb{N})$ είναι χώρος Banach

Έστω $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ βασική στον $\ell^p(\mathbb{N})$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$, $(i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$:

$|x_i(n)-x_j(n)|\leq\|x_i-x_j\|_p$

Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ $(x_i(n))_{i\in\mathbb{N}}$ θα είναι βασική στο $\mathbb{R}$ και όπως $\mathbb{R}$ πλήρης έστε συγκλίνουσα.

Έτσι ορίζωμε $x:\mathbb{N}\to\mathbb{R}$ τύπου

$x(n)=\lim\limits_{i} x_i(n)$.

Αρκεί νδο $x\in\ell^p(\mathbb{N})$ και $\|x_i-x\|_p\to 0$

Έστω $\varepsilon>0$ τότε $\exists i_0\in\mathbb{N}$ ώστε $\|x_i-x_j\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$

$\forall i,j\geq i_0 \Rightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_i(n)-x_j(n)|^p\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{2}, \forall i,j\geq i_0$

$\Rightarrow \left(\sum\limits_{n=1}^{m}|x_i(n)-x_j(n)|^p\right)^{1/p}<\frac{\varepsilon}{2}, \forall i,j\geq i_0, \forall m\in\mathbb{N}$

Για $j\to\infty$ έχουμε

$\left(\sum\limits_{n=1}^{m}|x_i(n)-x(n)|^p\right)^{1/p}\leq\frac{\varepsilon}{2}, \forall i\geq i_0, \forall m\in\mathbb{N}$

Για $m\to\infty$ έχουμε

$\left(\sum\limits_{n=1}^{\infty}|x_i(n)-x(n)|^p\right)^{1/p}\leq\frac{\varepsilon}{2}, \forall i\geq i_0 \quad (*)$

Για $i=i_0$ $x_{i_0}-x\in\ell^p(\mathbb{N})$

Άρα, $x=x_{i_0}-(x_{i_0}-x)\in\ell^p(\mathbb{N})$

Από την $(*)$: $\|x_i-x\|_p\leq\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon, \forall i\geq i_0$

$x_i\xrightarrow{\|\cdot\|_p}x \Leftrightarrow \|x_i-x\|_p\to 0$

Άρα, $(\ell^p(\mathbb{N}),\|\cdot\|_p)$ είναι χώρος Banach